Ciência da Computação

Engenharia de Computação

Mestrado em Informática

Teoria dos Grafos

Maria Claudia Silva Boeres

boeres@inf.ufes.br

Programa

1.Conceitos Básicos
2.Grafos Eulerianos e Hamiltonianos
3.Caminhos, Ciclos e Conectividade
4.Árvores
5.Representação matricial de grafos
6.Conjuntos de Corte
7.Coloração de grafos e Cobertura
8.Conjuntos Independentes
9.Grafos Planares
10.Grafos Direcionados
11.Alguns Problemas Famosos em Grafos

Motivação

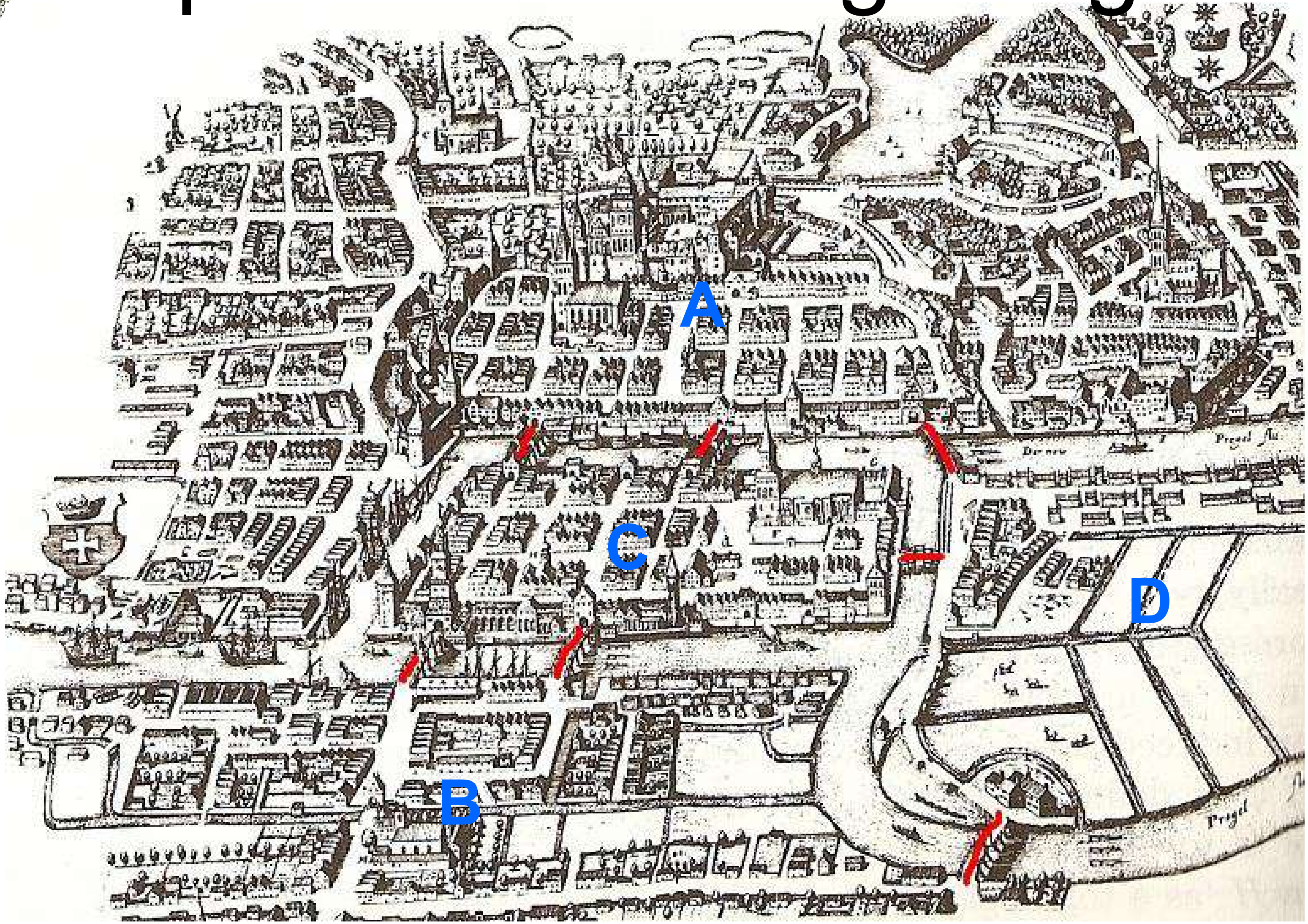
- Por que estudar grafos?
  - Importante ferramenta matemática com aplicação em diversas áreas do conhecimento
  - Utilizados na definição e/ou resolução de problemas
  - Existem centenas de problemas computacionais que empregam grafos com sucesso.

Primeiras motivações da área...

- Königsberg Bridge Problem

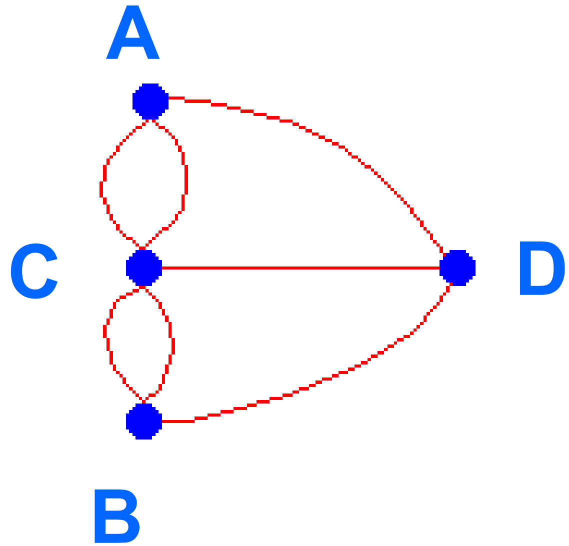
Duas ilhas C e D, existentes no rio Pregel em Königsberg (Rússia), foram ligadas às margens do rio (A e B) através de 7 pontes. É possível iniciar uma caminhada a partir de um dos blocos de terra (A, B, C ou D), passar por cada uma das pontes e voltar ao ponto de partida sem nadar pelo rio?

As pontes de Königsberg



O problema das 7 pontes

- 1736: Euler foi o primeiro a representar esse problema usando grafos e provou que uma solução para o mesmo não existe!



- 1847: G.R.Kirchnoff desenvolveu a teoria de árvores para trabalhar com aplicações em circuitos elétricos.
- 1852:F. Guthrie apresentou informalmente o problema das 4 cores: São suficientes apenas 4 cores para colorir qualquer mapa em superfície plana, de maneira que regiões fronteiriças recebam cores distintas.

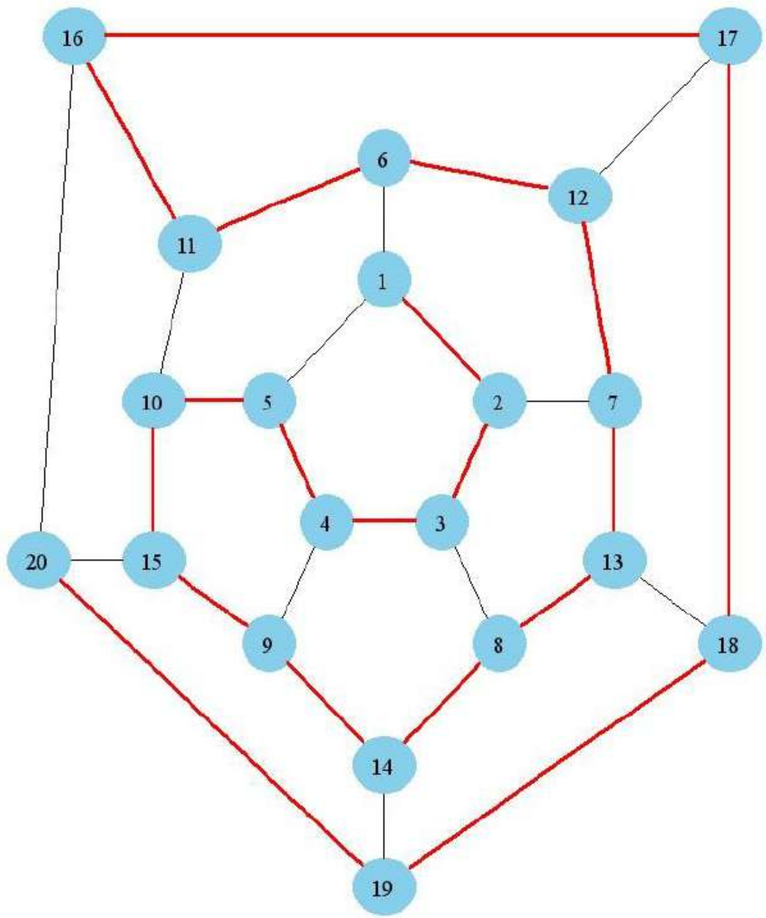
- 1878: Cayley apresentou o problema para o London Mathematical
- 1879: Kempe publica uma prova incorreta
- 1976: Appel & Haken - execução de ± 1200 horas de CPU do computador CDC6700, testando inúmeras configurações.
- 1977: Appel & Haken provaram a conjectura, usando indução matemática

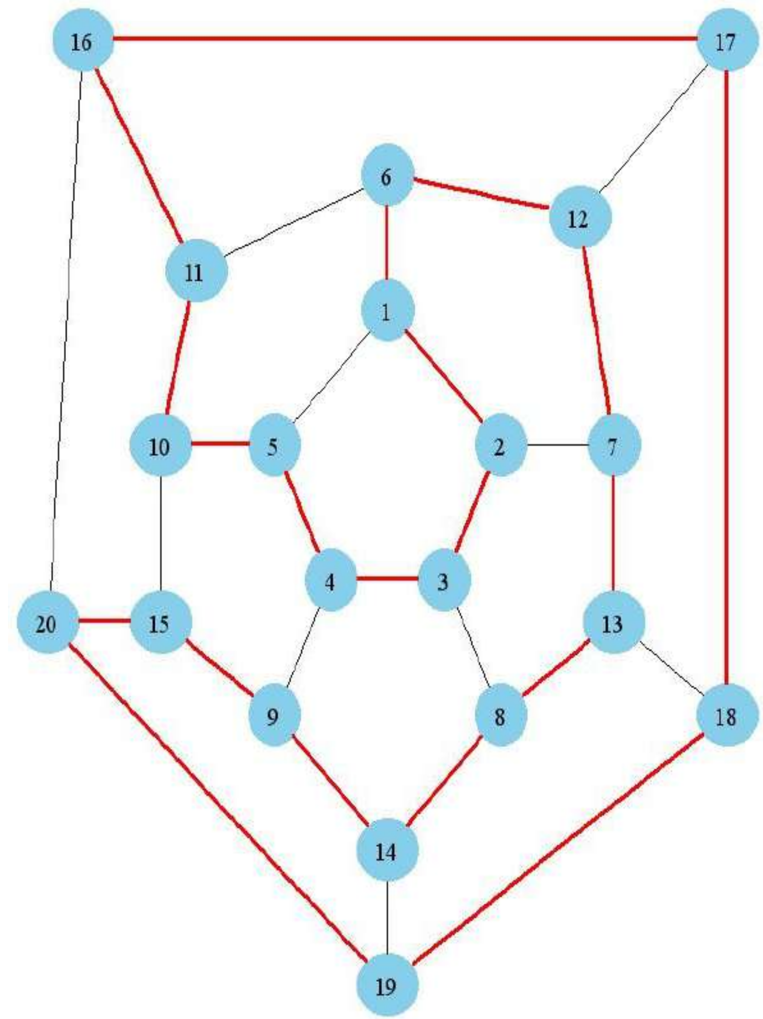
- 1859: Sir W.R. Hamilton inventou um jogo que consistia em um dodecaedro com 12 faces e 20 vértices, com cada face sendo um pentágono regular e três arestas se encontrando em cada vértice e os vértices foram rotulados com nomes de 20 cidades importantes. O objetivo do jogo é achar uma rota pelas arestas do dodecaedro passando por cada vértice apenas uma vez.

Ciclo Hamiltoniano

- A solução para esse problema específico é fácil de se obter. No entanto, ainda não se tem uma condição necessária e suficiente para se verificar a existência de um ciclo hamiltoniano em um grafo arbitrário

Caminho e Ciclo Hamiltoniano



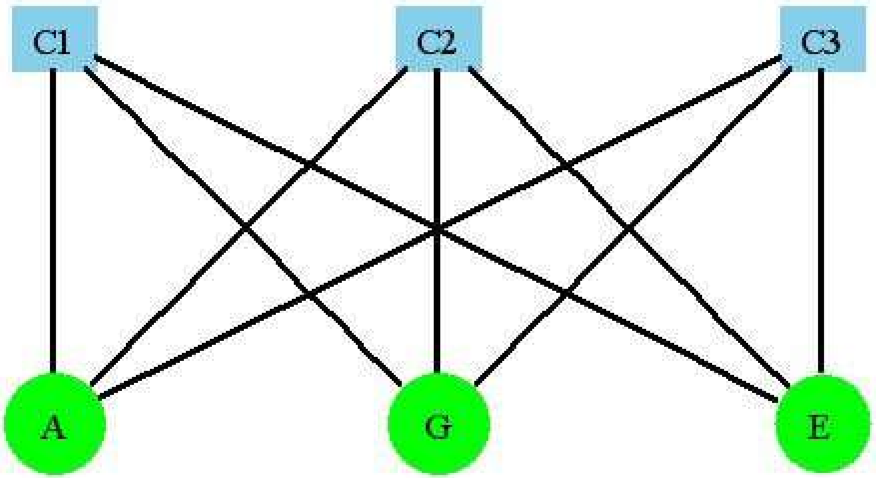


- Depois desta época pouca coisa foi investigada em teoria dos grafos por quase um século.
- O interesse ressurgiu na década de 20 com os estudos de D. König que se transformaram em um livro, publicado em 1936.

A importância do modelo

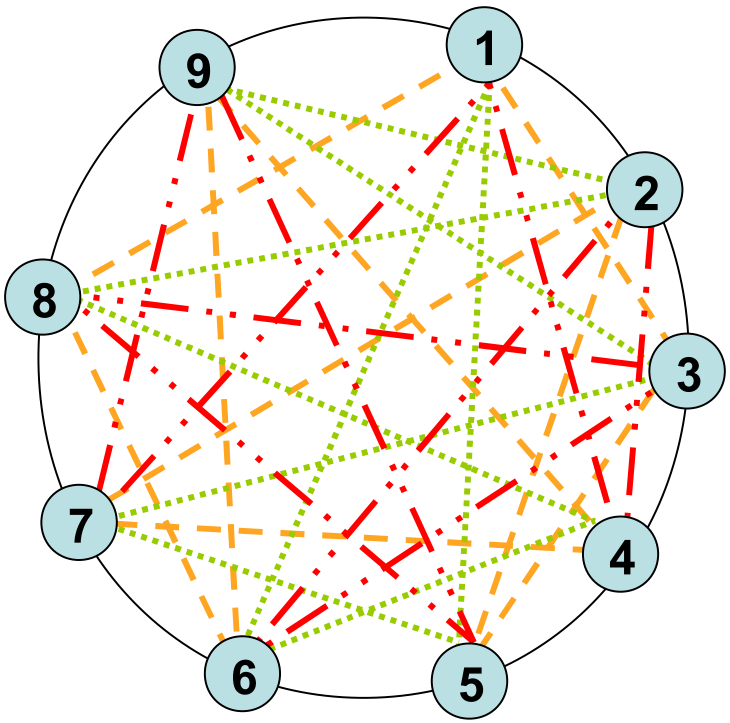
Utilities Problem

Considere 3 casas (C1, C2 e C3), cada uma com três utilidades: água (A), gás (G) e eletricidade (E). As utilidades estão conectadas às casas por meio de fios e canos.



Considerando que todos os fios e canos estão no mesmo plano, é possível fazer as instalações sem cruzá-los?

Seating Problem



Nove membros de um clube se encontram diariamente para almoçar e se sentam em volta de uma mesa redonda. A cada dia, cada membro do clube quer se sentar ao lado de um colega diferente. Quantos dias são necessários para dispor arranjos distintos de pessoas?

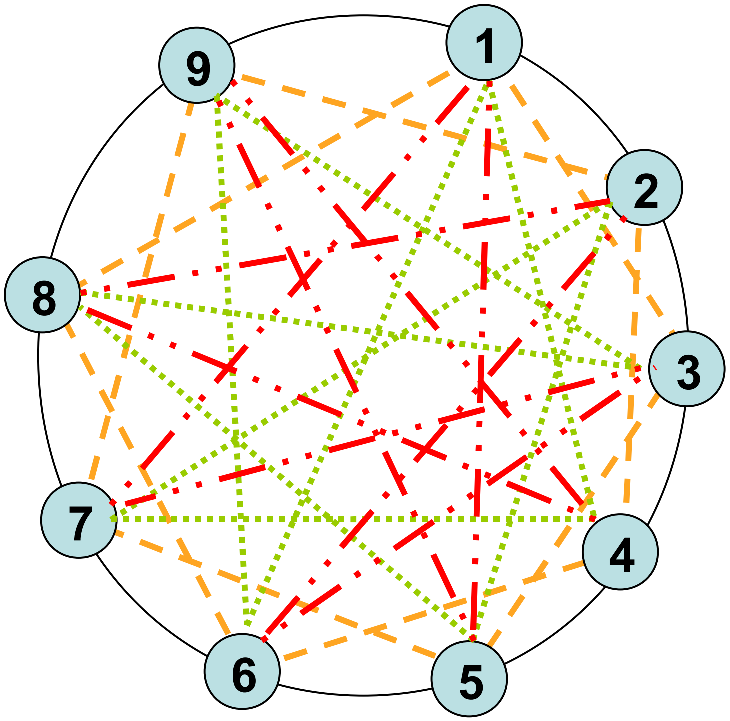
1 2 3 4 5 6 7 8 9 1

1 3 5 2 7 4 9 6 8 1

1 5 7 3 9 2 8 4 6 1

1 7 9 5 8 3 6 2 4 1

Seating Problem



Nove membros de um clube se encontram diariamente para almoçar e se sentam em volta de uma mesa redonda. A cada dia, cada membro do clube quer se sentar ao lado de um colega diferente. Quantos dias são necessários para dispor arranjos distintos de pessoas?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 1

1 3 5 7 9 2 4 6 8 1

1 4 7 2 5 8 3 9 6 1

1 5 9 4 8 2 6 3 7 1

Conceitos Básicos

Conceitos Básicos

- O que é um grafo?

$G=(V, E)$

$V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ → vértices

$E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ → arestas

$e_k = \{v_i, v_j\}$, $k = 1,\ldots,m$, $i,j = 1,\ldots, n$

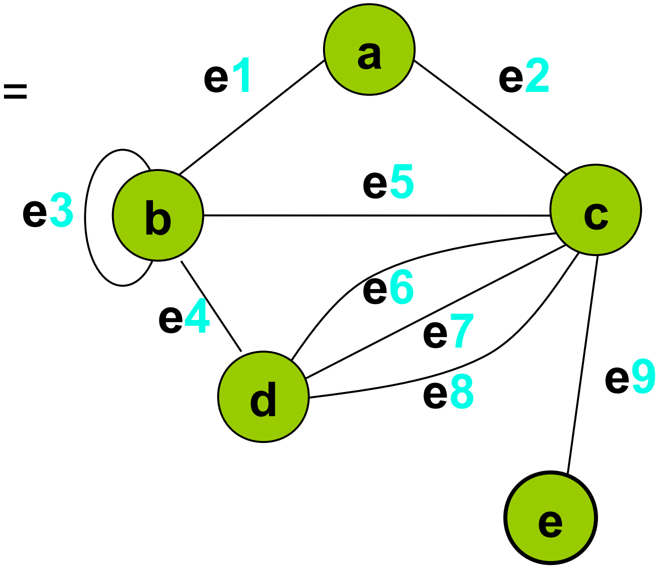
v_i e v_j são ditos extremos de e_k

Exemplo

G = (V, E)

V = {a,b,c,d,e}
E = {{a,b},{a,c},{b,c},{b,d},{c,d},{c,e}} =
{ e1, e2, e4, e5, e7, e9}

Grafo simples



Multigrafo

G = (V, E)

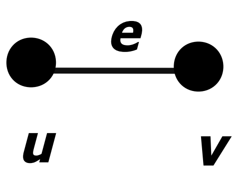
V = {a,b,c,d,e}
E = {{a,b},{a,c},{b,b},{b,c},{b,d},{c,d},{c,d},{c,d},{c,e}} =
{ e1, e2, e3, e4, e5, e6, e7, e8, e9}

Conceitos

- Uma aresta do tipo $\{v_i, v_i\}$ é denominada laço.
  - A aresta e_3 do exemplo anterior é um laço.
- Arestas que possuem os mesmos vértices extremos são ditas paralelas.
  - As arestas e_6, e_7 e e_8 do exemplo anterior são paralelas.
- Um grafo que possui arestas paralelas é denominado multigrafo.
- Um grafo sem laços nem arestas paralelas é denominado grafo simples.

Conceitos

- Os extremos de uma aresta são ditos incidentes com a aresta, e vice-versa.

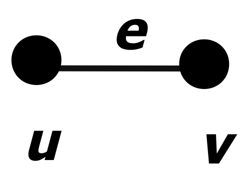


***u* e *v* são incidentes a e**
e é incidente a *u* e a *v*

Conceitos

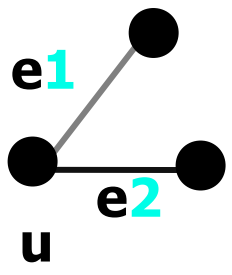
- Dois vértices que são incidentes a uma mesma aresta são ditos adjacentes.

_u_ e _v_ são adjacentes



- Duas arestas que são incidentes a um mesmo vértice são ditas adjacentes.

_e1_ e _e2_ são adjacentes



Observação

O conceito de incidência
ou adjacência
é importante para a
representação
da estrutura de um grafo
como um diagrama

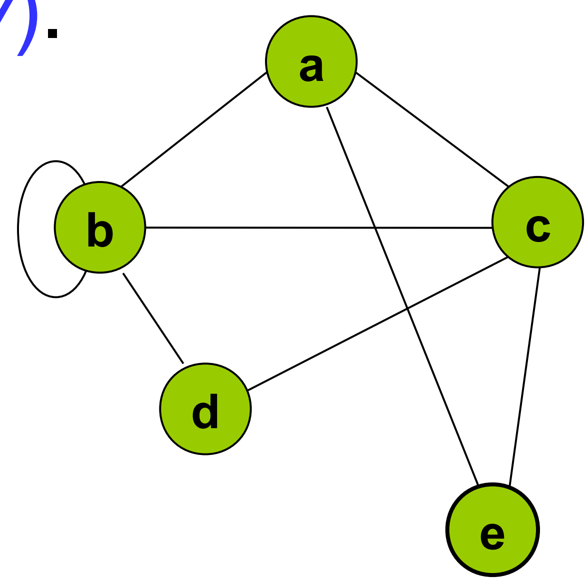
Conceitos

- O número de vértices de um grafo G é denotado por n = |V|. O valor n também é conhecido como ordem de G
- O número de arestas de um grafo é denotado por m = |E|
- Se n e m são finitos, o grafo é finito. Caso contrário é dito infinito.
  - Exemplo de grafo infinito: malhas

Conceitos

- O número de arestas incidentes a um vértice *v* é denominado grau(*v*) e representado por d(*v*).

d(a) = 3
d(b) = 5
d(c) = 4
d(d) = 2
d(e) = 2

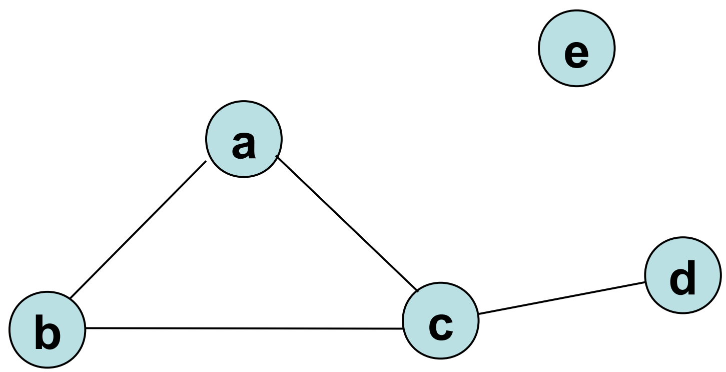


- Grau também é conhecido como valência.

Conceitos

- Vértice isolado é o vértice que não possui arestas incidentes (grau nulo)
- Vértice folha ou terminal é o vértice que possui grau 1
- Vizinhos de um vértice são os vértices adjacentes a ele.

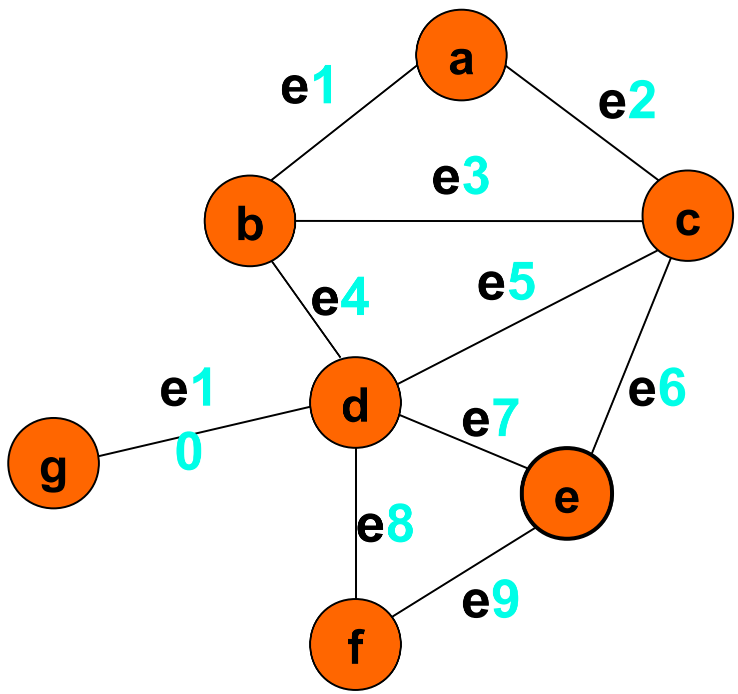
d é um vértice folha e
e é um vértice isolado
b e **c** são vizinhos de **a**



Conceitos

- Pares de vértices (ou de arestas) não adjacentes são denominadas independentes.
- Um conjunto de vértices (ou arestas) é independente se nenhum par de seus elementos é adjacente.

Exemplo



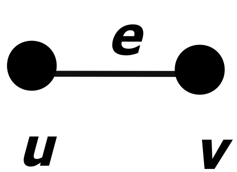
- e1 e e5 são independentes
- a e d são independentes
- {b,e,g} é um conjunto independente
- {e1, e5 } é um conjunto independente

Teorema 1:

Seja G = (V,E) um grafo simples com n vértices e m arestas. Então

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m$$

Prova:

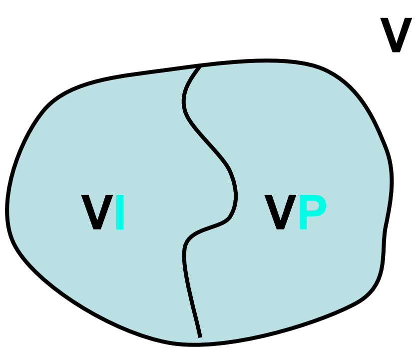


- A aresta *e* é incidente aos vértices *v* e *w*
- É contabilizada no cômputo do grau de *v* e também de *w*.

Corolário 1:

O número de vértices de grau ímpar, de um grafo G, é par.

Prova:



$$\sum_{v \in V} d(v) = \underbrace{\sum_{v \in VI} d(v)}_{\text{par}} + \underbrace{\sum_{v \in VP} d(v)}_{\text{par}} = \underbrace{2m}_{\text{par}}$$

Exercícios

- Mostre que o grau máximo de qualquer vértice em um grafo simples com n vértices é n-1.

- Mostre que o número máximo de arestas em um grafo simples com n vértices é

$$n(n-1)/2$$

Exercícios

Construa um grafo com 10 vértices, que possua a seguinte seqüência de graus: {1,1,1,3,3,3,4,6,7,9}, ou mostre ser impossível construí-lo.

Exercícios

Os turistas John, Leuzinger, Dufois e Medeiros se encontram em um bar em Paris e começam a conversar. As línguas disponíveis são o inglês, o francês, o português e o alemão. John fala todas as línguas, Leuzinger não fala o português, Dufois fala francês e alemão e Medeiros fala inglês e português. Represente por meio de um grafo todas as possibilidades de **um deles dirigir-se a outro, sendo compreendido**.